数理解析研究所講究録 1438 巻 2005 年 66-82

シューア測度とその類似の極限分布[1]

九州大学大学院数理学府　松本 詔 (SHO MATSUMOTO)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1　はじめに

自然数の分割の上の確率を考える. 分割とは, 非負整数の非増加列

$$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots),\qquad \lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots,$$

で, 有限個を除いて $\lambda_j=0$ となるもののことである. 0 でない λ_j の個数を分割 λ の長さといい, $\ell(\lambda)$ とかく. また, $|\lambda|=\sum_{j\geq1}\lambda_j$ を λ の重さという. $\mathcal{P}$ を分割全体とし, $\mathcal{P}_N=\{\lambda\in\mathcal{P}:|\lambda|=N\}$ とおく. 対称群 $\mathfrak{S}_N$ の**プランシュレル測度**とは, 次式で定義される $\mathcal{P}_N$ 上の確率測度である.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}(\lambda)=\frac{(f^\lambda)^2}{N!},\qquad\lambda\in\mathcal{P}_N. \tag{1.1}$$

ここで, f^λ は型が λ の標準ヤング盤の個数である. よく知られている公式 $N!=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_N}(f^\lambda)^2$ より, これはちゃんと確率測度になっている. 対称群のプランシュレル測度と呼ぶ理由は, N の分割が $\mathfrak{S}_N$ の既約表現をパラメトライズして, 各 λ に対応する既約表現の次元が f^λ だからである. この測度において分割の成分 λ_j を確率変数と思い, その分布, さらには N を無限大に飛ばしたときの極限分布が研究されている. まずはそれについて述べよう.

1.1　ポワソン化

プランシュレル測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}$ はそのままでは扱いにくい. プランシュレル測度を全部 “つなげて” 一つの新しい測度を作ろう. ξ を正の実数とする. $\mathcal{P}$ 上の確率測度 $\mathrm{P}^\xi_{\mathrm{PP}}$ を

$$\mathrm{P}^\xi_{\mathrm{PP}}(\lambda)=e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\left(\frac{f^\lambda}{|\lambda|!}\right)^2,\qquad\lambda\in\mathcal{P}, \tag{1.2}$$

で定義する. ちゃんと確率測度になっていることは,

$$\sum_{N=0}^\infty\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_N}\mathrm{P}^\xi_{\mathrm{PP}}(\lambda)=e^{-\xi}\sum_{N=0}^\infty\frac{\xi^N}{N!^2}\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_N}(f^\lambda)^2=e^{-\xi}\sum_{N=0}^\infty\frac{\xi^N}{N!}=1$$

[1]研究集会「表現論における組合せ論的手法とその応用」 2004 年 10 月 19 日～22 日.

からわかる．この測度 $\mathrm{P}^{\xi}_{\mathrm{PP}}$ をポワソン化されたプランシュレル測度と呼ぶ．確率変数の列 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ の分布を見るためには，その相関関数を求めればよい．これは，ランダム行列の固有値分布の研究と平行しているのだが，それについては §6 で補足する．測度 $\mathrm{P}^{\xi}_{\mathrm{PP}}$ の相関関数は，次式で定義される．

$$\rho^{\xi}_{\mathrm{PP}}(A) = \mathrm{P}^{\xi}_{\mathrm{PP}}\{\lambda \in \mathcal{P} \ : \ S(\lambda) \supset A\}, \qquad A \text{ は } \mathbb{Z} \text{ の有限部分集合.} \tag{1.3}$$

ここで，$S(\lambda)$ は集合 $\{\lambda_j - j \ : \ j = 1, 2, \ldots\}$ である．この相関関数は以下のように行列式で与えることができる．

定理 1.1 ([BOO, J3]). 有限集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ に対して，

$$\rho^{\xi}_{\mathrm{PP}}(A) = \det(\mathcal{K}^{\xi}_{\mathrm{PP}}(a_i, a_j))_{1 \le i,j \le N}.$$

ここで，各 $\mathcal{K}^{\xi}_{\mathrm{PP}}(r, s)$ は

$$\mathcal{K}^{\xi}_{\mathrm{PP}}(r, s) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \iint_{\mathbb{T}^2} e^{\sqrt{\xi}(z - z^{-1} + w - w^{-1})} \frac{1}{zw - 1} \frac{dzdw}{z^r w^s}$$

で与えられる．ただし，$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$. □

この相関関数の行列式表示から，λ_j たちの分布がわかる．例えば，λ_1 の分布関数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^{\xi}_{\mathrm{PP}}(\lambda_1 \le h) &= \sum_{\lambda : S(\lambda) \cap [h, \infty) = \emptyset} \mathrm{P}^{\xi}_{\mathrm{PP}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{h \le a_1 < \cdots < a_k} \rho^{\xi}_{\mathrm{PP}}(\{a_1, \ldots, a_k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{h \le a_1 < \cdots < a_k} \det(\mathcal{K}^{\xi}_{\mathrm{PP}}(a_i, a_j))_{1 \le i,j \le k} =: \det(I - \mathcal{K}^{\xi}_{\mathrm{PP}})_{\{h, h+1, \ldots\}}
\end{aligned}$$

とフレドホルム行列式の形でかける．

測度 $\mathrm{P}^{\xi}_{\mathrm{PP}}$ における確率変数 λ_j たちの $\xi \to \infty$ としたときの極限分布を見るには，相関関数の核 $\mathcal{K}^{\xi}_{\mathrm{PP}}$ を $\xi \to \infty$ として考えればよい．極限分布を述べるために，次のエアリーアンサンブルを準備する．

1.2 エアリーアンサンブル

[BOO] に従い，エアリーアンサンブルの定義を述べる．$\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}$ をエアリー核

$$\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x, y) = \int_0^{\infty} \mathrm{Ai}(x + z)\mathrm{Ai}(y + z) dz$$

とする．ただし，$\mathrm{Ai}(x)$ はエアリー関数

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\infty e^{-\pi\sqrt{-1}/3}}^{\infty e^{\pi\sqrt{-1}/3}} \exp\left(\frac{z^3}{3} - xz\right) dz.$$

$\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ の有限部分集合全体とする．$\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ 上の確率測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}$ を，相関関数が核 $\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}$ によって定まるように定義する．すなわち，$\mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}$ の相関関数

$$\rho_{\mathrm{Airy}}(X) = \mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}\{Y \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \ : \ Y \supset X\}, \qquad X = \{x_1, \dots, x_N\} \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}),$$

は，$\rho_{\mathrm{Airy}}(X) = \det(\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x_i, x_j))_{1 \le i,j \le N}$ と与えられる．このように相関関数が行列式(またはパフィアン)で与えられるような確率測度に関する研究は多くなされている．例えば，[So1, So2] を参考にされたい．

測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}$ に関する確率変数を $\zeta^{\mathrm{Ai}} = \{\zeta_1^{\mathrm{Ai}} > \zeta_2^{\mathrm{Ai}} > \cdots\} \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ と書くことにする．この確率変数 ζ^{Ai}(または測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}$) を**エアリーアンサンブル**という．

1.3 プランシュレル測度の極限分布

λ_j たちの極限分布はエアリーアンサンブルで記述される．

定理 1.2 ([BOO, J3, O1]). 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{PP}}^{\xi}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - 2\sqrt{\xi}}{\xi^{1/6}}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

は $\xi \to \infty$ とするとき，エアリーアンサンブルに分布収束する．すなわち，任意の $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{\xi \to \infty} \mathrm{P}_{\mathrm{PP}}^{\xi} \left\{ \lambda \in \mathcal{P} \ : \ \frac{\lambda_j - 2\sqrt{\xi}}{\xi^{1/6}} < a_j \ (1 \le j \le m) \right\}$$
$$= \mathrm{P}_{\mathrm{Airy}}\{\zeta^{\mathrm{Ai}} \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \ : \ \zeta_j^{\mathrm{Ai}} < a_j \ (1 \le j \le m)\}.$$

□

もとのプランシュレル測度の極限定理は，これから [J1] による手法を用いて得られる．

定理 1.3 ([BOO, J3, O1]). 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

は $N \to \infty$ とするとき，エアリーアンサンブルに分布収束する． □

1.4 シューア測度

シューア関数を思い出そう ([Mac])．$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$，$\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots)$ を独立変数の無限列とする．$s_\lambda(\mathbf{x})$ を分割 λ に対応するシューア関数とする．シューア関数は次のコーシー恒等式を満たす．

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(\mathbf{x}) s_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j \ge 1} \frac{1}{1 - \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j}.$$

この等式から $\mathcal{P}$ 上の "形式的な" 確率測度が以下で定義される.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}(\lambda) = \prod_{i,j\geq 1}(1-\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j)\cdot s_\lambda(\mathbf{x})s_\lambda(\mathbf{y}), \qquad \lambda\in\mathcal{P}. \tag{1.4}$$

明示していないが, 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ をパラメーターとして持っている. この測度をシューア測度と呼ぶ. この名前は [O2] で初めて現われる. 上で "形式的な" と記したが, 各 λ に対して $s_\lambda(\mathbf{x})s_\lambda(\mathbf{y})$ が非負で, 積 $\prod_{i,j\geq 1}(1-\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j)$ が有限ならば, $\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}$ は本当に確率測度となる.

ポワソン化されたプランシュレル測度はシューア測度の特殊化としてみることができる. シューア関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ は, べき和関数 $p_k(\mathbf{x})=\sum_{i\geq 1}\mathbf{x}_i^k$ の $\mathbb{Q}$ 係数の多項式で書けることを思い出そう ([Mac, I-7]).

命題 1.4. 特殊化

$$p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = \sqrt{\xi}\delta_{k1}, \qquad k=1,2,3,\ldots,$$

により, シューア測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Schur}}$ はポワソン化されたプランシュレル測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{PP}}^{\xi}$ になる. □

定理 1.1 は, シューア測度にも拡張される. すなわち, ρ_{PP}^{ξ} と同様に定義されるシューア測度の相関関数 ρ_{Schur} も行列式で記述される ([O2]). また定理 1.2 は, シューア測度のある特殊化における極限定理と位置づけることができる. 他の特殊化においても, 同様の極限定理が成り立つ ([J2, 松本 0, 松本 1]).

今回の目的は, シューア関数の代わりにシューア Q 関数を用いて定義される測度, シフトシューア測度に関して, 上と同様の研究を行っていくことである.

2 シフトシューア測度

分割 λ の 0 でない成分が全て異なるとき, λ は **strict** であるという. $\mathcal{D}$ で, そのような分割全体を表すとする.

$$\mathcal{D}=\{\lambda\in\mathcal{P} \ : \ \lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_{\ell(\lambda)}>0\}.$$

関数 $Q_{\mathbf{x}}(z)$ を

$$Q_{\mathbf{x}}(z)=\prod_{i\geq 1}\frac{1+\mathbf{x}_i z}{1-\mathbf{x}_i z}$$

で定める. 定義より, $Q_{\mathbf{x}}(z)$ は関数等式 $Q_{\mathbf{x}}(z)Q_{\mathbf{x}}(-z)=1$ を満たす. $\ell(\lambda)\leq n$ なる $\lambda\in\mathcal{D}$ に対して, **シューア Q 関数** $Q_\lambda(\mathbf{x})$ は

$$\prod_{i=1}^{n}Q_{\mathbf{x}}(z_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{z_i-z_j}{z_i+z_j}$$

の展開式における $z_1^{\lambda_1}z_2^{\lambda_2}\cdots z_n^{\lambda_n}$ の係数として定義される ([Mac, III-8]). ただし,

$$\frac{z-w}{z+w}=1+2\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r z^{-r}w^r$$

と展開するものとする. もちろん, 上の定義は n の選び方によらない. シューア Q 関数は, 対称群の射影表現やスーパーリー環の表現論で重要な役割を果たしている.

シューア Q 関数は次のコーシー型恒等式を満たす [Mac, III-8].

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{D}} 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda(\mathbf{x})Q_\lambda(\mathbf{y}) = \prod_{i,j\geq 1} \frac{1+\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j}{1-\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j} = \exp\left(\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{2}{n} p_k(\mathbf{x})p_k(\mathbf{y})\right). \tag{2.1}$$

ここで, 2番目の等式は簡単な式変形でわかる. この等式から, $\mathcal{D}$ 上の確率測度が次のように定義される.

$$\mathrm{P_{SS}}(\lambda) = \prod_{i,j\geq 1}\left(\frac{1-\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j}{1+\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j}\right) 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda(\mathbf{x})Q_\lambda(\mathbf{y}), \qquad \lambda\in\mathcal{D}. \tag{2.2}$$

これを**シフトシューア測度** (**shifted Schur measure**) と呼ぶ ([TW]).

$\mathbb{Z}_{>0}$ を正の整数全体, $\mathfrak{P}(\mathbb{Z}_{>0})$ を $\mathbb{Z}_{>0}$ の有限部分集合全体とする. プランシュレル測度のときと同様に, 相関関数を考えよう. 今, strict な分割だけを考えているので, 記号 $S(\lambda)$ を使う必要は無い. すなわち, シフトシューア測度の相関関数を

$$\rho_{\mathrm{SS}}(A) = \mathrm{P_{SS}}\left\{\lambda\in\mathcal{D} \ :\ \{\lambda_1,\dots,\lambda_{\ell(\lambda)}\}\supset A\right\}, \qquad A\in\mathfrak{P}(\mathbb{Z}_{>0}), \tag{2.3}$$

で定義する. われわれの主結果はこの相関関数がパフィアンでかけるということである.

ここで, パフィアンの定義を復習しておこう. $B=(b_{ij})_{1\leq i,j\leq 2m}$ を $2m\times 2m$ 交代行列とする: $b_{ji}=-b_{ij}$. B の**パフィアン**とは, 次式で定義される量である.

$$\mathrm{pf}(B) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{F}_{2m}} \mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{m} b_{\sigma(2j-1)\sigma(2j)}. \tag{2.4}$$

ここで, $\mathfrak{F}_{2m}$ は対称群 $\mathfrak{S}_{2m}$ の部分集合

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{2m} = \{\sigma = (\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(2m))\in\mathfrak{S}_{2m} \ :\ \\ \sigma(2j-1)<\sigma(2j)\ (1\leq j\leq m),\ \sigma(1)<\sigma(3)<\cdots<\sigma(2m-1)\}\end{aligned}$$

である. 行列 B に対して, 次の記号も用いる.

$$B = \begin{pmatrix} B(1,1) & \dots & B(1,m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(m,1) & \dots & B(m,m)\end{pmatrix}, \qquad B(r,s) = \begin{pmatrix} B_{00}(r,s) & B_{01}(r,s) \\ B_{10}(r,s) & B_{11}(r,s)\end{pmatrix}.$$

とくに B が交代的ならば, 各成分は関係式

$$B_{ij}(r,s) = -B_{ji}(s,r), \qquad i,j\in\{0,1\},\ r,s\in\{1,\dots,m\} \tag{2.5}$$

を満たす．逆に関係式(2.5)を満たすような写像

$$B : \{1,\ldots,m\}^2 \longrightarrow \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}) \ ; \ (r,s) \mapsto B(r,s) = \begin{pmatrix} B_{00}(r,s) & B_{01}(r,s) \\ B_{10}(r,s) & B_{11}(r,s) \end{pmatrix}$$

に対して，行列 $(B(r,s))_{1\le r,s\le m}$ は $2m \times 2m$ 交代行列となる．

パフィアンは行列式の拡張とみなすことができる．実際，$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ を任意の $m \times m$ 行列とする．このとき，

$$\omega(A)(r,s) = \begin{pmatrix} 0 & a_{rs} \\ -a_{sr} & 0 \end{pmatrix}, \qquad r,s \in \{1,\ldots,m\}$$

とおくときに $\det(A) = \mathrm{pf}(\omega(A)(r,s))_{1\le r,s\le m}$ とかける．

話をシフトシューア測度に戻す．二変数関数 $f(z,w)$ に対して，$[z^r w^s]f(z,w)$ で $f(z,w)$ の展開式での $z^r w^s$ の係数を表すとする．以下がわれわれの主結果である．

定理 2.1. $\mathbb{Z}_{>0}$ の有限部分集合 $A = \{a_1,\ldots,a_N\}$ に対して，相関関数 ρ_{SS} は以下で与えられる．

$$\rho_{\mathrm{SS}}(A) = \mathrm{pf}(\mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(a_i,a_j))_{1\le i,j\le N},$$

ここで，

$$\mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(r,s) = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{00}(r,s) & \mathcal{K}_{01}(r,s) \\ \mathcal{K}_{10}(r,s) & \mathcal{K}_{11}(r,s) \end{pmatrix}$$

は以下で定まる．

$$\mathcal{K}_{00}(r,s) = \frac{1}{2}[z^r w^s] \frac{Q_{\mathbf{x}}(z)Q_{\mathbf{x}}(w)}{Q_{\mathbf{y}}(z^{-1})Q_{\mathbf{y}}(w^{-1})} \frac{z-w}{z+w},$$

ただし，$\frac{z-w}{z+w} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{-k} w^k$.

$$\mathcal{K}_{01}(r,s) = -\mathcal{K}_{10}(s,r) = \frac{1}{2}[z^r w^s] \frac{Q_{\mathbf{x}}(z)Q_{\mathbf{y}}(w)}{Q_{\mathbf{y}}(z^{-1})Q_{\mathbf{x}}(w^{-1})} \frac{zw+1}{zw-1},$$

ただし，$\frac{zw+1}{zw-1} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} w^{-k}$.

$$\mathcal{K}_{11}(r,s) = \frac{1}{2}[z^r w^s] \frac{Q_{\mathbf{y}}(z)Q_{\mathbf{y}}(w)}{Q_{\mathbf{x}}(z^{-1})Q_{\mathbf{x}}(w^{-1})} \frac{w-z}{w+z},$$

ただし，$\frac{w-z}{w+z} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^k w^{-k}$. □

この定理の2通りの証明をこれから与えよう．

3 定理2.1の証明1

ここでは, 定理2.1の表現論的証明の概略を与えよう. くわしくは, [松本0] または [M1] を見よ. シューア測度の場合の対応する証明は [O2] で与えられている.

V を $\boldsymbol{e}_k$ $(k=1,2,3,\dots)$ を基底とするような $\mathbb{Z}[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\dots\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\dots]$ 係数の加群とする. その外積代数 $\bigwedge V$ は

$$\boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{e}_{\lambda_1}\wedge\boldsymbol{e}_{\lambda_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\lambda_{\ell(\lambda)}}, \qquad \lambda\in\mathcal{D}$$

を基底とする. とくに, $\boldsymbol{v}_\emptyset = 1$. 内積を

$$(3.1) \qquad \langle \boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}2^{-\ell(\lambda)}$$

で定義する. このとき, $\boldsymbol{e}_k^\vee = 2\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{v}_\lambda^\vee = \boldsymbol{e}_{\lambda_1}^\vee\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\lambda_l}^\vee = 2^l\boldsymbol{v}_\lambda$ とおくとき, $(\boldsymbol{v}_\lambda^\vee)_{\lambda\in\mathcal{D}}$ は $(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{D}}$ の双対基底となる.

$\bigwedge V$ 上の作用素 ψ_k $(k=1,2,\dots)$ を

$$\psi_k\boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{e}_k\wedge\boldsymbol{v}_\lambda$$

で定義する. また, ψ_k^* を ψ_k の内積(3.1) に関する随伴作用素とする. ψ_k^* は明示的に

$$\psi_k^*\boldsymbol{v}_\lambda = \sum_{i=1}^{l}\frac{(-1)^{i-1}}{2}\delta_{k,\lambda_i}\boldsymbol{e}_{\lambda_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\boldsymbol{e}_{\lambda_i}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{\lambda_l}, \qquad l=\ell(\lambda)$$

で与えられる. ここで, $\widehat{\boldsymbol{e}_k}$ は $\boldsymbol{e}_k$ を除くことを意味する.

自己随伴作用素 S を

$$S\boldsymbol{v}_\lambda = (-1)^{\ell(\lambda)}\boldsymbol{v}_\lambda$$

で定める. 各 $k\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$\tilde{\psi}_k = \begin{cases} \psi_k & k\geq 1\,\text{のとき}, \\ S/2 & k=0\,\text{のとき}, \\ (-1)^k\psi_{-k}^* & k\leq -1\,\text{のとき}, \end{cases}$$

とおくと, 次の交換関係式を容易に得ることができる.

$$\tilde{\psi}_i\tilde{\psi}_j + \tilde{\psi}_j\tilde{\psi}_i = \frac{\delta_{i+j,0}}{2}, \qquad i,j\in\mathbb{Z}.$$

また, 射影作用素が

$$2\psi_k\psi_k^*\boldsymbol{v}_\lambda = \begin{cases} \boldsymbol{v}_\lambda & k\in\{\lambda_1,\dots,\lambda_l\}\,\text{のとき}, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられ，よって

$$\left(\prod_{k\in A} 2\psi_k\psi_k^*\right) \boldsymbol{v}_\lambda = \begin{cases} \boldsymbol{v}_\lambda & A \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\} \text{ のとき}, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が，任意の $A \subset \mathbb{Z}_{>0}$ と $\lambda \in \mathcal{D}$ に対して成り立つ．

おのおのの奇整数 n に対し，

$$\alpha_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \tilde{\psi}_{k-n}\tilde{\psi}_{-k}$$

とおく．また，$\tilde{\psi}_k$ の母関数を $\psi(z)$ で表す:

$$\psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\psi}_k z^k.$$

補題 3.1. 作用素 α_n は以下の交換関係式を満たす．

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \alpha_n\alpha_m - \alpha_m\alpha_n = \frac{n}{2}\delta_{m+n,0}, \qquad n, m \text{ は奇整数}.$$

さらに，

$$[\alpha_n, \psi(z)] = z^n\psi(z), \qquad n \in 2\mathbb{Z}+1$$

かつ

$$\langle 4\psi(z)\psi(w)\boldsymbol{v}_\emptyset, \boldsymbol{v}_\emptyset\rangle = \frac{z-w}{z+w} \tag{3.2}$$

を満たす． □

作用素 $\Gamma_+(\mathbf{x})$ と $\Gamma_-(\mathbf{x})$ を

$$\Gamma_+(\mathbf{x}) = \exp\left(\sum_{n\geq 1:\mathrm{odd}} \frac{2p_n(\mathbf{x})}{n}\alpha_n\right) \quad \text{and} \quad \Gamma_-(\mathbf{x}) = \exp\left(\sum_{n\geq 1:\mathrm{odd}} \frac{2p_n(\mathbf{x})}{n}\alpha_{-n}\right),$$

で定める．ここで，$p_n(\mathbf{x})$ はべき和対称関数．混乱の恐れの無いときは $\Gamma_\pm(\mathbf{x})$ を $\Gamma_\pm$ と省略する．

補題 3.2. 次が成り立つ．

$$\Gamma_+\boldsymbol{v}_\emptyset = \boldsymbol{v}_\emptyset, \quad \Gamma_\pm^* = \Gamma_\mp, \quad \Gamma_+(\mathbf{x})\Gamma_-(\mathbf{y}) = \left(\prod_{i,j\geq 1} \frac{1+\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j}{1-\mathbf{x}_i\mathbf{y}_j}\right)\Gamma_-(\mathbf{y})\Gamma_+(\mathbf{x}),$$

$$\Gamma_\pm(\mathbf{x})\psi(z) = Q_{\mathbf{x}}(z^{\pm 1})\psi(z)\Gamma_\pm(\mathbf{x}).$$

□

シューア Q 関数は作用素 Γ_- の行列成分として与えられる.

命題 3.3. 各 $\lambda\in\mathcal{D}$ に対して,

$$\langle \Gamma_-(\mathbf{x})\boldsymbol{v}_\emptyset, \boldsymbol{v}_\lambda^\vee\rangle = Q_\lambda(\mathbf{x}).$$

□

補題3.2と命題3.3から容易に次を得る.

命題 3.4. 有限集合 $A\subset\mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\rho_{\mathrm{SS}}(A)=\left\langle \left(\prod_{k\in A}2\Psi_k\Psi_k^*\right)\boldsymbol{v}_\emptyset, \boldsymbol{v}_\emptyset\right\rangle.$$

ここで, $\Psi_k=G\psi_kG^{-1}$ かつ $\Psi_k^*=G\psi_k^*G^{-1}$ で, $G=\Gamma_+(\mathbf{x})\Gamma_-(\mathbf{y})^{-1}$. □

さらに ψ_k,ψ_k^* の交換関係から, 次のように言い換えられる.

命題 3.5. $\rho_{\mathrm{SS}}(A)=\mathrm{pf}(\widetilde{\mathcal{K}}(a,b))_{a,b\in A}$ とかける. ここで,

$$\widetilde{\mathcal{K}}(a,b)=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathcal{K}}_{00}(a,b) & \widetilde{\mathcal{K}}_{01}(a,b)\\ \widetilde{\mathcal{K}}_{10}(a,b) & \widetilde{\mathcal{K}}_{11}(a,b)\end{pmatrix}.$$

ただし, $\widetilde{\mathcal{K}}_{00}(a,b)=\langle 2\Psi_a\Psi_b\boldsymbol{v}_\emptyset,\boldsymbol{v}_\emptyset\rangle$, $\widetilde{\mathcal{K}}_{01}(a,b)=-\widetilde{\mathcal{K}}_{10}(b,a)=\langle 2\Psi_a\Psi_b^*\boldsymbol{v}_\emptyset,\boldsymbol{v}_\emptyset\rangle$, $\widetilde{\mathcal{K}}_{11}(a,b)=\langle 2\Psi_a^*\Psi_b^*\boldsymbol{v}_\emptyset,\boldsymbol{v}_\emptyset\rangle$ とおいた. □

残るは, $\mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(r,s)=\widetilde{\mathcal{K}}(r,s)$ を示すだけである. 補題3.2から,

$$G\psi(z)G^{-1}=Q_{\mathbf{x}}(z)Q_{\mathbf{y}}(z^{-1})^{-1}\psi(z).$$

したがって, (3.2) より,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{K}}_{00}(r,s)=&\langle 2\Psi_r\Psi_s\boldsymbol{v}_\emptyset,\boldsymbol{v}_\emptyset\rangle=[z^rw^s]\langle 2G\psi(z)\psi(w)G^{-1}\boldsymbol{v}_\emptyset,\boldsymbol{v}_\emptyset\rangle\\ =&\frac{1}{2}[z^rw^s]\frac{Q_{\mathbf{x}}(z)Q_{\mathbf{x}}(w)}{Q_{\mathbf{y}}(z^{-1})Q_{\mathbf{y}}(w^{-1})}\frac{z-w}{z+w}=\mathcal{K}_{00}(r,s)\end{aligned}$$

を得る. 同様にして, $\widetilde{\mathcal{K}}_{01}(r,s)=\mathcal{K}_{01}(r,s)$, $\widetilde{\mathcal{K}}_{11}(r,s)=\mathcal{K}_{11}(r,s)$ もわかる. 以上で定理2.1の証明が完成した.

4 定理2.1の証明2

ここでは, 定理2.1の線型代数的証明の概略を与える. くわしくは, [松本0] または [M2] を見よ. シューア測度の場合の同様の証明は [BR] で与えられている.

まず, パフィアン点過程について述べる. $\mathfrak{X}$ を高々可算集合とする. L を写像

$$L : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}); (x, y) \mapsto L(x, y) = \begin{pmatrix} L_{00}(x,y) & L_{01}(x,y) \\ L_{10}(x,y) & L_{11}(x,y) \end{pmatrix}$$

で, 関係式 $L_{ij}(x,y) = -L_{ji}(y,x)$ $(i,j \in \{0,1\},\ x,y \in \mathfrak{X})$ を満たすとする. そのような L は $\mathfrak{X}$ 上の**交代行列核**と呼ばれる ([R, So2]). 我々は, L をヒルベルト空間 $\ell^2(\mathfrak{X}) \oplus \ell^2(\mathfrak{X})$ 上の作用素として扱う. そのとき L は, 各ブロックが $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ で番号づけられる行列である. n 個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{X}$ に対して, $L[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ で $2n \times 2n$ 交代行列 $(L(x_i, x_j))_{1 \le i,j \le n}$ を表すこととする. また J を

$$J(x,y) = \delta_{x,y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定まる交代行列核とする.

$\mathfrak{P}(\mathfrak{X}) = \{X \subset \mathfrak{X};\ \#X \text{ は有限}\}$ とおく. 次で定まる $\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$ 上の確率測度を, L で定まる $\mathfrak{X}$ 上の**パフィアン点過程**という.

$$\pi(X) = \pi_L(X) = \frac{\mathrm{pf}(L[X])}{\mathrm{pf}(J+L)}, \qquad X \in \mathfrak{P}(\mathfrak{X}).$$

このとき, その相関関数はパフィアンで与えられる: $\rho_L(X) = \sum_{Y \in \mathfrak{P}(\mathfrak{X}),\ Y \supset X} \pi(Y) = \mathrm{pf}(K[X])$, ただし, $K = J + (J+L)^{-1}$.

より一般に, $\mathfrak{Y}$ を $\mathfrak{Y}^c = \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{Y}$ が有限集合となるような $\mathfrak{X}$ の部分集合とする. このとき, $\mathfrak{Y}$ 上の**条件付きパフィアン点過程**を次で定める.

$$\pi_{L,\mathfrak{Y}}(X) = \frac{\mathrm{pf}(L[X \cup \mathfrak{Y}^c])}{\mathrm{pf}(J[\mathfrak{Y}] + L)}, \qquad X \in \mathfrak{P}(\mathfrak{Y}).$$

ただし, $J[\mathfrak{Y}]$ は $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ と同一視している. ここでこの行列のブロックわけは, 分割 $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} \sqcup \mathfrak{Y}^c$ に対応している. 相関関数は $\rho_{L,\mathfrak{Y}}(X) = \sum_{Y \in \mathfrak{P}(\mathfrak{Y}),\ Y \supset X} \pi_{L,\mathfrak{Y}}(Y) = \mathrm{pf}(K[X])$ $(X \in \mathfrak{P}(\mathfrak{Y}))$ で与えられる. ここで,

$$K = J[\mathfrak{Y}] + (J[\mathfrak{Y}] + L)^{-1}\Big|_{\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}}. \tag{4.1}$$

シフトシューア測度は, ある条件付きパフィアン点過程と自然に同一視できる. まずはそれについて述べよう. いま, 変数の列 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ が次の場合のときだけ示せば十分である.

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n), \quad \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n), \qquad n \text{ は偶数.}$$

このとき, $\mathcal{D}$ から $\mathfrak{P}^{\text{even}}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = \{X \in \mathfrak{P}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \ : \ \#X \text{ は偶数}\}$ への全単射写像 ϕ を

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} \{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}\}, & \ell(\lambda) \text{ が偶数のとき}, \\ \{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, 0\}, & \ell(\lambda) \text{ が奇数のとき}, \end{cases}$$

で定める. $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, n\} \sqcup \mathfrak{Y}$ 上の交代行列核 L を次で定める.

$$L = \begin{pmatrix} \mathcal{V} & \mathcal{W}\eta^{-\frac{1}{2}} \\ -\eta^{-\frac{1}{2}}{}^t\mathcal{W} & O \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

ここで, $\mathfrak{Y} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathcal{V} = (\mathcal{V}(i,j))_{1 \leq i,j \leq n}$, $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(i,r))_{1 \leq i \leq n,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ とおいた. 各成分は以下のようである.

$$\mathcal{V}(i,j) = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j} & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j}{\mathbf{y}_i + \mathbf{y}_j} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{W}(i,r) = \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_i^r & 0 \\ 0 & \mathbf{y}_i^r \end{pmatrix}.$$

さらに η は, 各ブロックが

$$\eta(r,s) = \delta_{rs} \begin{pmatrix} \eta(r) & 0 \\ 0 & \eta(r) \end{pmatrix}, \qquad r, s \in \mathbb{Z}_{\geq} 0,$$

となるような行列である. ここで,

$$\eta(r) = \begin{cases} 1 & r = 0 \text{ のとき}, \\ \frac{1}{2} & r \geq 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

と定めた.

命題 4.1. (4.2) の L で定まる $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上の条件付きパフィアン点過程は, 全単射 ϕ を通じてシフトシューア測度と一致する. すなわち, 任意の $\lambda \in \mathcal{D}$ に対して,

$$\pi_{L,\mathfrak{Y}}(\phi(\lambda)) = \frac{\operatorname{pf}(L[\{1, \dots, n\} \sqcup \phi(\lambda)])}{\operatorname{pf}(J[\mathfrak{Y}] + L)} = \mathrm{P}_{\mathrm{SS}}(\lambda).$$

□

よって(4.1) から, $K = J[\mathfrak{Y}] + (J[\mathfrak{Y}] + L)^{-1}\Big|_{\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y}}$ の明示的な表示を得なければならない. そのために, 次の補題を用いよう.

補題 4.2 ([BR]).

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathcal{M}^{-1} & \mathcal{M}^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C\mathcal{M}^{-1} & D^{-1} - D^{-1}C\mathcal{M}^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix},$$

ここで, $\mathcal{M} = BD^{-1}C - A$ とおいていて, 行列 D, $\mathcal{M}$ が可逆であると仮定している. □

これから, 核 $K = J[\mathfrak{Y}] + (J[\mathfrak{Y}] + L)^{-1}\Big|_{\mathfrak{Y}\times\mathfrak{Y}}$ は $J[\mathfrak{Y}]\eta^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{W}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{W}\eta^{-\frac{1}{2}}J[\mathfrak{Y}]$ に等しい. ここで, $\mathcal{M} = \mathcal{W}\eta^{-\frac{1}{2}}J[\mathfrak{Y}]\eta^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{W} - \mathcal{V}$. 一般に, 交代行列 B に対して $\mathrm{pf}(-JBJ) = \mathrm{pf}(B)$ が成り立つから, K を

$$-\eta^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{W}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{W}\eta^{-\frac{1}{2}}$$

と置き換えてもよい. 逆行列 $\mathcal{M}^{-1}$ は以下で与えられる.

命題 4.3. $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の交代行列核 $\mathcal{M}^{-1}$ を次のように表す.

$$\mathcal{M}^{-1}(k,l) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{00}^{-1}(k,l) & \mathcal{M}_{01}^{-1}(k,l) \\ \mathcal{M}_{10}^{-1}(k,l) & \mathcal{M}_{11}^{-1}(k,l) \end{pmatrix}, \qquad 1 \le k,l \le n.$$

そのとき,

$$\mathcal{M}_{00}^{-1}(k,l) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-\mathbf{x}_k\mathbf{y}_j}{1+\mathbf{x}_k\mathbf{y}_j}\frac{1-\mathbf{x}_l\mathbf{y}_j}{1+\mathbf{x}_l\mathbf{y}_j}\right)\prod_{\substack{1\le i\le n,\\ i\ne k}}\left(\frac{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_i}\right)\prod_{\substack{1\le j\le n,\\ j\ne l}}\left(\frac{\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_j}\right)\frac{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l}{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_l}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{01}^{-1}(k,l) =& -\mathcal{M}_{10}^{-1}(l,k)\\ =& \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-\mathbf{x}_k\mathbf{y}_j}{1+\mathbf{x}_k\mathbf{y}_j}\frac{1-\mathbf{x}_j\mathbf{y}_l}{1+\mathbf{x}_j\mathbf{y}_l}\right)\prod_{\substack{1\le i\le n,\\ i\ne k}}\left(\frac{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_i}\right)\prod_{\substack{1\le j\le n,\\ j\ne l}}\left(\frac{\mathbf{y}_l+\mathbf{y}_j}{\mathbf{y}_l-\mathbf{y}_j}\right)\frac{1+\mathbf{x}_k\mathbf{y}_l}{1-\mathbf{x}_k\mathbf{y}_l}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{11}^{-1}(k,l) = \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k}{1+\mathbf{x}_j\mathbf{y}_k}\frac{1-\mathbf{x}_j\mathbf{y}_l}{1+\mathbf{x}_j\mathbf{y}_l}\right)\prod_{\substack{1\le i\le n,\\ i\ne k}}\left(\frac{\mathbf{y}_k+\mathbf{y}_i}{\mathbf{y}_k-\mathbf{y}_i}\right)\prod_{\substack{1\le j\le n,\\ j\ne l}}\left(\frac{\mathbf{y}_l+\mathbf{y}_j}{\mathbf{y}_l-\mathbf{y}_j}\right)\frac{\mathbf{y}_k-\mathbf{y}_l}{\mathbf{y}_k+\mathbf{y}_l}.$$

□

残るは, $K(r,s) = \mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(r,s)$ を示せばよい. いま, 変数 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_n$ が単位開円板の中の $2n$ 個の異なる点であると仮定して, その場合だけ示せばよい. すると留数定理から,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{00}(r,s) =& \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\iint_{|z|>|w|>1}\frac{Q_{\mathbf{x}}(z)Q_{\mathbf{x}}(w)}{Q_{\mathbf{y}}(z^{-1})Q_{\mathbf{y}}(w^{-1})}\frac{z-w}{z+w}\frac{dzdw}{z^{r+1}w^{s+1}}\\ =& -2\sum_{k,l=1}^{n}\mathbf{x}_k^r\mathbf{x}_l^s\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1-\mathbf{x}_k\mathbf{y}_j}{1+\mathbf{x}_k\mathbf{y}_j}\frac{1-\mathbf{x}_l\mathbf{y}_j}{1+\mathbf{x}_l\mathbf{y}_j}\right)\prod_{\substack{1\le i\le n,\\ i\ne k}}\left(\frac{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_i}\right)\prod_{\substack{1\le j\le n,\\ j\ne l}}\left(\frac{\mathbf{x}_l+\mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_j}\right)\frac{\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_l}{\mathbf{x}_k+\mathbf{x}_l}\\ =& -2\sum_{k,l=1}^{n}\mathbf{x}_k^r\mathcal{M}_{00}^{-1}(k,l)\mathbf{x}_l^s = K_{00}(r,s).\end{aligned}$$

ただし, 上の積分は以下の積分路上での線積分である.

$$\{z\in\mathbb{C} \,:\, |z| = r_1\}\times\{w\in\mathbb{C} \,:\, |w| = r_2\}, \quad 1 < r_2 < r_1 < 1+\epsilon.$$

もちろん, 積分値は r_1 や r_2 には依存してなく, ϵ は十分小さい正の実数である. 同様にして, $\mathcal{K}_{01}(r,s) = K_{01}(r,s)$, $\mathcal{K}_{11}(r,s) = K_{11}(r,s)$ も得る. したがって, 定理 2.1 の証明が完成する.

5 シフトシューア測度の極限定理とそのいくつかの例

5.1 シフトシューア測度の極限定理

シフトシューア測度の極限定理について述べよう. 以下の条件を満たすようなシフトシューア測度の特殊化の族を考える.

(0) θ を正の実数とする. $p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = p_k^\theta$ $(k = 1, 3, 5, \dots)$ と特殊化する. ただし, p_k^θ は実数であり, $\lim_{\theta\to+\infty} p_k^\theta/\theta = d_k \geq 0$ が存在する. ここで, $p^\theta = (p_1^\theta, p_3^\theta, \dots)$ とおく.
(1) 各 θ に対して, ある $\epsilon = \epsilon(\theta) > 0$ が存在して, べき級数 $g^\theta(z) := 2\sum_{k\geq1:\mathrm{odd}} \frac{p_k^\theta}{k} z^k$ が $|z| < 1+\epsilon$ で正則である.
(2) $g(z) = 2\sum_{k\geq1:\mathrm{odd}} \frac{d_k}{k} z^k$ とおく. このとき, 級数 $g(1) = 2\sum_{k\geq1:\mathrm{odd}} \frac{d_k}{k}$ が収束する. さらに, $g(z)$ は $z=1$ の周りに正則関数として解析接続される.

このとき, 次の定理を得る.

定理 5.1. $\mathrm{P}_{\mathrm{SS},p^\theta}$ を上の条件 (0), (1), (2) を満たすようなシフトシューア測度の特殊化とする. $b_1 = 2g'(1)$, $b_2 = g'''(1) + 3g''(1) + g'(1)$ とおく. このとき, $\theta \to +\infty$ で, 確率変数

$$\frac{\lambda_j - b_1\theta}{(b_2\theta)^{1/3}}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

はエアリーアンサンブルに分布収束する. □

この証明の基本的なアイディアだけを述べよう. シフトシューア測度とエアリーアンサンブルのそれぞれの相関関数の定義を思い出すと, ともに同じような形をしているのがわかる. だから, 定理 5.1 を示すには, シフトシューア測度の相関関数が, 適当にスケーリングをしたときに, エアリーアンサンブルの相関関数に収束することを示せばよいのである. 具体的には次を示せばよい.

命題 5.2. $\mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(r,s)$ の上の特殊化による値を $\mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(r,s;\theta)$ とおく. このとき, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{\theta\to\infty} (b_2\theta)^{1/3}\mathcal{K}_{\mathrm{SS}}(b_1\theta + (b_2\theta)^{1/3}x, b_1\theta + (b_2\theta)^{1/3}y; \theta) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x,y) \\ -\mathcal{K}_{\mathrm{Airy}}(x,y) & 0 \end{pmatrix}.$$

□

詳しい証明は [松本 0] にある.

5.2 シフトプランシュレル測度

定理 5.1 の例を, 具体的な特殊化で与える. まず, プランシュレル測度の'シフト版'を述べよう.

$\lambda \in \mathcal{D}$ に対して, g^λ をその標準シフト盤 (例えば [HH] を見よ) の個数とする. ここで, 例えば,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & 3 & 5 & 8 \\ \cline{2-4} \multicolumn{2}{c|}{} & 7 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{3-3}\end{array}$$

は $\lambda = (4,3,1)$ の標準シフト盤の一つである. $\mathcal{D}_N = \{\lambda \in \mathcal{D} \ : \ |\lambda| = N\}$ とおく. このとき, 次の等式が成り立つ ([HH]).

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{D}_N} 2^{-\ell(\lambda)} (g^\lambda)^2 = N!.$$

これから, $\mathcal{D}_N$ 上の確率測度が,

$$\mathrm{P}_{\mathrm{SPl},N}(\lambda) = \frac{2^{-\ell(\lambda)}(g^\lambda)^2}{N!}, \qquad \lambda \in \mathcal{D}_N \tag{5.1}$$

で定義できる. これは, プランシュレル測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{Plan},N}$ の類似である. そこで, この測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{SPl},N}$ を**シフトプランシュレル測度**と呼ぼう.

プランシュレル測度のときと同様にポワソン化を行おう. **ポワソン化されたシフトプランシュレル測度**は

$$\mathrm{P}^\xi_{\mathrm{PSP}}(\lambda) = e^{-\xi} \xi^{|\lambda|} 2^{|\lambda| - \ell(\lambda)} \left(\frac{g^\lambda}{|\lambda|!} \right)^2, \qquad \lambda \in \mathcal{D} \tag{5.2}$$

で定義される. ポワソン化されたプランシュレル測度がシューア測度の特殊化で得られたように, ポワソン化されたシフトプランシュレル測度はシフトシューア測度の特殊化としてみることができる.

命題 5.3. 特殊化

$$p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{y}) = \sqrt{\frac{\xi}{2}} \delta_{k1}, \qquad k = 1, 3, 5, \ldots, \tag{5.3}$$

により, シフトシューア測度 P_{SS} はポワソン化されたシフトプランシュレル測度 $\mathrm{P}^\xi_{\mathrm{PSP}}$ になる. □

では, 特殊化(5.3) に対して, 定理 5.1 を適用しよう. §5.1 の記号で, $\theta = \sqrt{\xi}$, $d_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{k,1}$ となるから, $g(z) = \sqrt{2} z$, $g^\theta(z) = \sqrt{2\xi} z$ である. よって定理の仮定は全て満たされるから, 次を得た.

定理 5.4. 測度 $\mathrm{P}^\xi_{\mathrm{PSP}}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - 2\sqrt{2\xi}}{(2\xi)^{1/6}}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

は, $\xi \to \infty$ でエアリーアンサンブルに分布収束する. □

プランシュレル測度のときと同様に次も得られる.

定理 5.5. 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{SPl},N}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - 2\sqrt{2N}}{(2N)^{1/6}}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

は, $N \to \infty$ でエアリーアンサンブルに分布収束する. □

定理 1.2, 定理 1.3 と比較せよ.

5.3 その他の特殊化

α を $0 < \alpha < 1$ なる実数とする. $\mathbf{x} = \mathbf{y} = (\overbrace{\alpha, \dots, \alpha}^{n}, 0, 0, \dots)$ と特殊化する. このときシフト測度は以下のようになる.

$$\mathrm{P}_{\mathrm{SS},\alpha,n}(\lambda) = \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^{n^2} \alpha^{2|\lambda|} 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda(\overbrace{1, \dots, 1}^{n})^2.$$

ここで, $Q_\lambda(1, \dots, 1)$ は, ある種のヤング盤の個数に等しいことが知られている ([Mac, III-8]). このとき, $p_k(\mathbf{x}) = p_k(\mathbf{x}) = n\alpha^k$ だから, §5.1 の記号で, $p_k^\theta = \theta\alpha^k$, $\theta = n$ となる. すると,

$$g(z) = \log \frac{1+\alpha z}{1-\alpha z}, \qquad g^\theta(z) = \theta g(z)$$

となる. これらの関数は $|z| < \alpha^{-1}$ で正則だから, 定理 5.1 の仮定は満たされる. 定数 b_1, b_2 はそれぞれ

$$b_1 = b_1(\alpha) = \frac{4\alpha}{1-\alpha^2}, \qquad b_2 = b_2(\alpha) = \frac{2\alpha(1+6\alpha^2+\alpha^4)}{(1-\alpha^2)^3}$$

と与えられる.

定理 5.6. 測度 $\mathrm{P}_{\mathrm{SS},\alpha,n}$ における確率変数

$$\frac{\lambda_j - b_1(\alpha)n}{(b_2(\alpha)n)^{1/3}}, \qquad j = 1, 2, \dots$$

は, $n \to \infty$ でエアリーアンサンブルに分布収束する. □

この結果は λ_1 に対してのみ, [TW] で得られている.

6 ランダム行列の固有値分布

ランダム分割の研究は, ランダム行列の固有値分布の研究と類似点が多い. それを比較できるよう, ランダム行列の対応する事実をここに付録としてつけくわえておく. くわしくは, [Me] などを見られたい.

ランダムエルミート行列で, もっとも基本的なものは**ガウスユニタリアンサンブル (Gaussian Unitary Ensemble (GUE))** である. そのランダム行列の固有値分布は, 以下の $\mathbb{R}^N$ 上の確率密度関数を持つ.

$$P_N(x_1,\ldots,x_N) = C_N \prod_{1\le j<k\le N} |x_j - x_k|^2 \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} x_j^2\right), \qquad x_1,\ldots,x_N \in \mathbb{R}.$$

ここで, 規格化定数 C_N は $\int_{\mathbb{R}^N} P_N(x_1,\ldots,x_N)dx_1\cdots dx_N = 1$ から定まる. この n 点相関関数は

$$R_{n,N}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{N!}{(N-n)!}\int_{\mathbb{R}^{N-n}} P_N(x_1,\ldots,x_N)dx_{n+1}\cdots dx_n$$

で定義される. この相関関数は, $\mathbb{R}$ 上のある核 $K_N(x,y)$ があって

$$R_{n,N}(x_1,\ldots,x_N) = \det(K_N(x_i,x_j))_{1\le i,j\le n}$$

の形で与えられる (定理 1.1, 定理 2.1 と比較せよ).

$N\to\infty$ としたときの固有値分布については以下がいえる.

定理 6.1 ([J3]). $x^{(j)}$ を $N\times N$ ランダムGUE 行列の j 番目に大きい固有値とする. このとき, 確率変数の列

$$\sqrt{2}N^{1/6}(x^{(j)} - \sqrt{2N}), \qquad j = 1,2,\ldots$$

は $N\to\infty$ でエアリーアンサンブルに分布収束する. □

定理 1.2, 定理 5.1 と比較せよ.

参考文献

[BOO] A. Borodin, A. Okounkov, and G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 481–515.

[BR] A. Borodin and E. Rains, Eynard-Mehta theorem, Schur process, and their pfaffian analogs, math-ph/0409059.

[HH] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, "Projective Representations of Symmetric Groups: Q-functions and Shifted Tableaux", Clarendon Press, Oxford, 1992.

[J1] K. Johansson, The longest increasing subsequence in a random permutation and a unitary random model, Math. Res. Letters **5** (1998), 63–82.

[J2] —, Shape fluctuations and random matrices, Commun. Math. Phys. **209** (2000), 437–476.

[J3] —, Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, Ann. of Math. (2) **153** (2001), 259–296.

[Mac] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd Edition", Oxford, 1995.

[M1] S. Matsumoto, Correlation functions of the shifted Schur measure, math.CO/0312373.

[M2] —, Alpha-Pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure, math.CO/0411277.

[松本 0] 松本 詔, ランダム分割の分布とパフィアン, 修士論文 (2005).

[松本 1] —, Hall-Littlewood function で定義される Young 図形全体の上の測度について, 研究集会「表現論および等質空間上の調和解析」(2004 年 8 月) 講究録.

[松本 2] —, パフィアンの一般化と pfaffian point process, 2004 年度表現論シンポジウム講演集.

[Me] M. L. Mehta, "Random Matrices", 2nd ed., Academic Press, Boston, MA, 1991.

[O1] A. Okounkov, Random matrices and random permutations, Internat. Math. Res. Notices (2000), 1043–1095.

[O2] —, Infinite wedge and random partitions, Selecta Math. (N.S.) **7** (2001), 57–81.

[R] E. M. Rains, Correlation functions for symmetrized increasing subsequences, math.CO/0006097.

[So1] A. Soshnikov, Janossy densities. I. determinantal ensemble, J. Stat. Phys. **113** (2003), 595–610.

[So2] —, Janossy densities. II. pfaffian emsemble, J. Stat. Phys. **113** (2003), 611–622.

[TW] C. A. Tracy and H. Widom, A limit theorem for shifted Schur measures, Duke Math. J. **123** (2004), 171–208.